الدوال الأسّية

1. الدالة الأسية النبيرية:

أ. تعريف:

الدالة العكسية للدالة $\ln$ تسمى الدالة الأسية النبيرية و نرمز لها ب : $\exp$

ملاحظة: $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(x) = e^x$

ب. نتائج :

- $\begin{cases} x = \ln(y) \\ (y > 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = y \\ (x \in \mathbb{R}) \end{cases}$
- $\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\mapsto]0,+\infty[\\ x &\mapsto \exp(x) \end{aligned}$
- $D_{\exp} = \mathbb{R}$ و $\forall x \in \mathbb{R} : \ e^x > 0$
- ليكن x و y من $\mathbb{R}$ لدينا :
  - $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$
  - $e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$
  - $e^x \geq e^y \Leftrightarrow x \geq y$
- $\forall x \in \mathbb{R} : \ln(e^x) = x$
- $\forall x > 0 : e^{\ln x} = x$
- $e^0 = 1$ و $e^1 = e$

ج. العمليات :

ليكن x و y من $\mathbb{R}$ لدينا :

1) $e^x \times e^y = e^{x+y}$

2) $\dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$

3) $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$

4) $(e^x)^r = e^{rx} \qquad (r \in \mathbb{Q})$

د. النهايات:

$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$	$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0^+$ $\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0^-$ $\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = \begin{cases} 0^+ & n : pair \\ 0^- & n : impair \end{cases}$
$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$	

ه. الاشتقاق و الأصلية:

1) الدالة exp قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad (e^x)' = e^x$

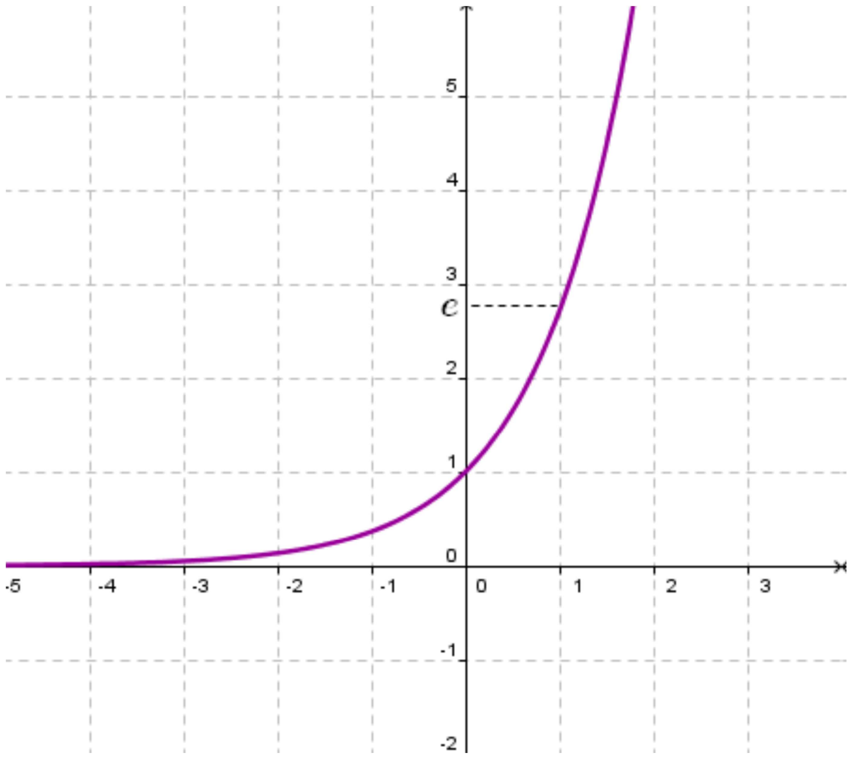
2) إذا كانت U دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $x \mapsto e^{U(x)}$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا :
$$(\forall x \in I) \quad \left(e^{U(x)}\right)' = U'(x)e^{U(x)}$$

3) $(\forall x \in I) \quad (e^{rx})' = re^{rx}$

4)

الدالة	الأصلية
e^x	e^x
e^{rx}	$\frac{1}{r}e^{rx}$
$U'(x)e^{U(x)}$	$e^{U(x)}$

و. التمثيل المبياني للدالة exp



2. الدالة الأسية للأساس a حيث $a>0$ و $a\neq 1$:

أ. تعريف :

الدالة الأسية للأساس a هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\forall x\in\mathbb{R}\quad \exp_a(x)=a^x$

ب. نتائج :

- ❖ $\forall x\in\mathbb{R}\quad e\,\mathrm{xp}_a(x)=a^x=e^{x\ln a}$
- ❖ $\forall x\in\mathbb{R}\quad \ln\left(a^x\right)=x\ln a$
- ❖ $\begin{cases} x=\log_a(y) \\ (y>0)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\exp_a(x)=y \\ (x\in\mathbb{R})\end{cases}$
- ❖ $x=y \Leftrightarrow a^x=a^y$

ج. العمليات :

ليكن x و y من $\mathbb{R}$ لدينا :

❖ $a^x \times a^y = a^{x+y}$	❖ $\frac{1}{a^x} = a^{-x}$
❖ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	❖ $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$

د. الإشتقاق و التغيرات :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \left(a^x\right)' = \ln a \times a^x$$

نتيجة :

- إذا كان : $a > 1$
  فإن $\exp_a$ تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$
  و لدينا $\lim_{x \to +\infty} \exp_a(x) = +\infty$ و $\lim_{x \to -\infty} \exp_a(x) = 0$

- إذا كان : $0 < a < 1$
  فإن $\exp_a$ تناقصية قطعا على $\mathbb{R}$
  و لدينا $\lim_{x \to +\infty} \exp_a(x) = 0$ و $\lim_{x \to -\infty} \exp_a(x) = +\infty$